

NOTIZEN

Bemerkung zum Ludwigschen Beweis des Ergodensatzes

Von JOACHIM SCHRÖTER

Institut für theoretische Physik der Freien Universität Berlin
(Z. Naturforsch. **14 a**, 750—751 [1959]; eingegangen am 5. Juni 1959)

Im Abschnitt 2 der Arbeit von LUDWIG¹ wird der Ergodensatz, d. h. folgende Aussage:

$$Z(A) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-S} \int_S^T (\text{Sp}(W_t A) - \text{Sp}(W A))^2 dt \ll \text{Sp}(W A^2) \quad (1)$$

unter gewissen Voraussetzungen bewiesen. Diese sind

1. H , der HAMILTON-Operator des Systems, habe ein nur diskretes Spektrum: $H \Phi_\varepsilon = \varepsilon \Phi_\varepsilon$, das aber entartet sein kann: $H = \sum_\varepsilon E_\varepsilon$.

2. W , der statistische Operator, sei normierbar: $\text{Sp}(W) = 1$. $W = \sum E_\varepsilon W E_\varepsilon$ und $W_t = U_t^* W U_t$ mit $U_t = \sum e^{i\varepsilon t} E_\varepsilon$.

3. A soll der Bedingung genügen, daß

$$\bar{\nu} |(\Phi_\varepsilon, A \Phi_{\varepsilon'})| \ll \|A \Phi_\varepsilon\| + \|A \Phi_{\varepsilon'}\|, \quad \varepsilon \neq \varepsilon' \quad (2)$$

[wenn $(\Phi_\varepsilon, A \Phi_{\varepsilon'}) \neq 0$ ist], wobei $\bar{\nu} = \text{Max } \nu_{\varepsilon\varepsilon'}$ und $\nu_{\varepsilon\varepsilon'}$ die Anzahl der Paare $\varepsilon, \varepsilon'$ mit $\varepsilon + \varepsilon' = \varepsilon + \varepsilon'$ ist.

Die 3. Bedingung, Gl. (2), die eigentlich wesentliche Bedingung für die Ergodizität, stellt also eine Forderung an H und A , und zwar an H die, daß $\bar{\nu}$ existiert, d. h. endlich ist. Setzt man Gl. (1) und die Voraussetzungen 1. und 2. voraus, so erhält man

$$|(\Phi_\varepsilon, A \Phi_{\varepsilon'})| \ll \|A \Phi_\varepsilon\| + \|A \Phi_{\varepsilon'}\|. \quad (3)$$

Gl. (3) ist also eine notwendige Bedingung für den Ergodensatz. Wegen der Ähnlichkeit von Gl. (2) und (3) liegt die Vermutung nahe, daß auch schon (3) bereits hinreichend ist. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie durch ein Beispiel gezeigt wird.

H habe ein nichtentartetes äquidistantes Spektrum, es sei

$$W = P_\psi \text{ mit } \psi = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{\varepsilon}^M \Phi_\varepsilon, \quad \|\Phi_\varepsilon\| = 1.$$

Die Matrix von A habe in der Diagonalen M mal 1 stehen und zu beiden Seiten der Diagonalen in je N zu ihr parallelen Geraden $1/\sqrt{N}$, sonst 0.

Es sei ferner $\sqrt{N} \gg 1$. Dann ist Gl. (3) erfüllt:

$$\begin{aligned} \|A \Phi_\varepsilon\| + \|A \Phi_{\varepsilon'}\| &= \sqrt{\sum_{\eta} (\Phi_\varepsilon, A \Phi_\eta)^2} + \sqrt{\sum_{\eta} (\Phi_{\varepsilon'}, A \Phi_\eta)^2} \\ &\geq 1 \gg \frac{1}{\sqrt{N}} = |(\Phi_\varepsilon, A \Phi_{\varepsilon'})|; \quad \varepsilon \neq \varepsilon'. \end{aligned}$$

$$(A_{\varepsilon\varepsilon'}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{N}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{N}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} Z(A) &= \sum_{\omega \neq 0} \left(\sum_{\varepsilon (\omega \text{ fest})} (E_\varepsilon \psi, E_\varepsilon A E_{\varepsilon-\omega} \psi) \right)^2 \\ &= \sum_{\omega \neq 0} \left(\sum_{\varepsilon (\omega \text{ fest})} \frac{1}{M} (\Phi_\varepsilon, A \Phi_{\varepsilon-\omega}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{\omega \neq 0} \frac{M^2}{N} = 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Sp}(W A^2) &= \sum_{\varepsilon} \|A E_\varepsilon \psi\|^2 = \frac{1}{M} \sum_{\varepsilon \eta} (\Phi_\varepsilon, A \Phi_\eta)^2 \\ &= \frac{1}{M} \left(M + 2 \frac{M N}{N} \right) = 3. \end{aligned}$$

Es ist also keineswegs $Z(A) \ll \text{Sp}(W A^2)$.

Früher war in einer anderen Arbeit² ein Beweis des Ergodensatzes gegeben worden unter den Voraussetzungen 1. und 2., Gl. (3) und Voraussetzung der Resonanzfreiheit des Spektrums von H . (Es ist nicht notwendig, daß das Spektrum von H nicht entartet ist!) Das ist aber nach dem Beweise von LUDWIG¹ ebenfalls zu verstehen, denn im Falle von Resonanzfreiheit ist

$$\begin{aligned} \nu &= \sum_{\omega} \left(\sum_{\varepsilon (\omega \text{ fest})} \|E_\varepsilon \psi\|^2 \right) \left(\sum_{\varepsilon (\omega \text{ fest})} \|E_{\varepsilon-\omega} \psi\|^2 \right) \\ &= \sum_{\varepsilon \varepsilon'} \nu_{\varepsilon \varepsilon'} \|E_\varepsilon \psi\|^2 \|E_{\varepsilon'} \psi\|^2 \leq 1, \end{aligned}$$

d. h. $\bar{\nu} = 2$. Es ist nicht zu erwarten, daß auch das Umgekehrte gilt, nämlich, daß aus $\bar{\nu} = 2$ die Resonanzfrei-

¹ G. LUDWIG, Z. Phys. **150**, 346 [1958].

² G. LUDWIG, Die Grundlagen der Quantenmechanik, Springer-Verlag, Berlin 1954; Z. Phys. **135**, 483 [1953].



heit folgt. Die Voraussetzung Gl. (3) ist die schwächste heute bekannte Forderung für die Ergodizität, jedoch ist nicht bewiesen, daß sie optimal ist.

Zusammenfassend ergibt sich also, daß man als Bedingungen für ergodisches Verhalten an das Spektrum

die Forderung $\bar{\nu}$ nicht groß gegen 1 und an die ergodischen Observablen die Forderung (3) stellt.

Herrn Professor Dr. LUDWIG danke ich für zahlreiche Diskussionen und Anregungen zum Ergodenproblem.

The Motion of Mercury according to the Theory of Thiry and Lichnerowicz

By KURT JUST

Institut für Theoretische Physik der Freien Universität Berlin
(Z. Naturforschg. **14 a**, 751 [1959]; eingegangen am 24. Juli 1959)

The extended gravitational theory of THIRY and LICHNEROWICZ¹ is based on the equation

$$G_b^a + \varrho v^a v_b = 0, \quad (1)$$

where G_b^a is EINSTEIN's tensor in five dimensions, ϱ a scalar function of matter and v^a a certain "five-velocity". In four dimensions (1) yields EINSTEIN's 10 and MAXWELL's 4 equations, all of them modified by a 15th field function

$$g_{55} = 2 e^{2\sigma}, \quad (2)$$

which is determined by a 15th field equation. For the static field outside a spherically symmetric body without an electric charge only 4 of those equations are linearly independent. These yield

$$\left. \begin{aligned} (e^\sigma)'' &= 2, & (\sigma' e^\sigma)' &= (\nu' e^\sigma)' = 0, \\ 2\mu'' + \mu'^2 + \nu'^2 + 3\sigma'^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

if the four-dimensional metric is² written:

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= e^{-\sigma} (e^{-\nu} dr^2 + e^{\mu-\nu} d\omega^2 - e^\nu dt^2) \\ \text{with } d\omega^2 &= d\beta^2 + \cos^2 \beta d\varphi^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

A rigorous solutions of (3) is

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \frac{m}{a} \ln \frac{r-a}{r+a}, & \sigma &= \frac{n}{a} \ln \frac{r-a}{r+a}, \\ \mu &= \ln(r^2 - a^2), & a^2 &= m^2 + \frac{3}{4} n^2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

with the constants m, n uniquely determined by the central body. Applying the well known formalism of *super-potentials* to the³ extended theory, we receive

$$m = (\varrho), \quad 6n = 2m - (e^{2\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (6)$$

where the brackets mean a multiplication by $e^\sigma/8\pi$ and the three-dimensional *integration over the field-generating body*. If the MAXWELL field $F_{\mu\nu}$ inside this body would be purely radiational, then $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2 = 0$; but inside the sun we must also assume a COULOMB con-

tribution. Thus we have even

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} < 0, \quad \text{hence } n > \frac{1}{2} m. \quad (7)$$

Now it is easily⁴ seen, that the five-velocity v^a of a *testbody* always describes a five-dimensional geodesic. In the special case of an electrically neutral test-body this also means a geodesic four-velocity (in general this is modified² not only by the LORENTZ force, but also by an additional term dependent on the variability of σ). For a motion in the plane $\beta=0$ of the metric (4) this yields (with $D, E = \text{const}$):

$$(dr/d\varphi)^2 = (E^2 e^{2\mu-2\nu} - e^{-\nu-\sigma}) D^{-2}, \quad (8)$$

giving with (5) in the usual approximation a nearly circular *ellipse* with a slowly moving *perihelion*. The angular velocity of the latter turns out² to have EINSTEIN's value multiplied by the factor

$$f = \frac{6m+n}{6m-3n} > \frac{19}{15} > \frac{5}{4}, \quad (9)$$

where the numerical estimate followed from (7). Thus we have a relative *deviation above* $\frac{1}{4} = 25\%$, whereas the observations of mercury⁵ have confirmed EINSTEIN's expression with an uncertainty *below* 2%.

It must be emphasized that our result has nothing to do with the question, whether the new field variable (2) shall be called a variable⁶ gravitational "constant", a dielectricity⁷ of the vacuum or something else. To show this *independence of an interpretation* of σ clearly, we have not given it any name at all.

Implicitly the above result is already contained in former⁸ papers, where we have considered JORDAN's extended theory of gravitation. There the situation could be saved by a certain condition on the undetermined parameters of the field equations. But the theory of THIRY and LICHNEROWICZ¹ — which was independently developed also by SCHMUTZER⁷ — is based on the uniquely arranged equation (1). Thus being a *completely determined special case* of JORDAN's⁶ theory, its contradiction with experience cannot be avoided.

The detailed calculations have been performed in 1955 within a research for the Deutsche Forschungsgemeinschaft under Prof. LUDWIG.

¹ Y. THIRY, J. Math. Pures Appl. **30**, 275 [1951]; A. LICHNEROWICZ, Theories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme. Masson & Cie., Paris 1955, p. 153–179.

² K. JUST, Zur JORDANSchen Gravitations-Theorie 1957 (unpublished).

³ K. JUST, Z. Phys. **142**, 493 [1955].

⁴ A. LICHNEROWICZ, l. c.¹, p. 214.

⁵ G. M. CLEMENCE, Rev. Mod. Phys. **19**, 361 [1947].

⁶ P. JORDAN, Schwerkraft und Weltall, Vieweg, Braunschweig 1955.

⁷ E. SCHMUTZER, Z. Phys. **149**, 329 [1957]; A. LICHNEROWICZ, l. c.¹, p. 199–201.

⁸ K. JUST, Z. Phys. **144**, 411 [1956]. K. JUST, Unified Field Theories, 1956 (unpublished). That the unusual, but wholly general formulation (4) of a static metric with spherical symmetry gives for (1) the exact solution (5), was discovered² later.